

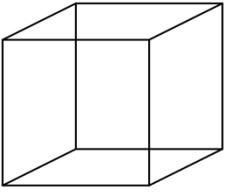
क्षेत्रमिति-3D

- घन
- घनाभ
- बेलन
- खोखला बेलन
- शंकु
- छिन्नक
- L. S.A. (Lateral Surface Area)/ C.S.A. (curved Surface Area)

पार्श्वीय क्षेत्रफल/वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल \Rightarrow आधार का परिमाण \times ऊँचाई

- T.S.A. (Total Surface Area) (सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल) L.S.A. + आधार एवं छत के क्षेत्रफलों का योग
- आयतन (Volume) \Rightarrow आधार का क्षेत्रफल \times ऊँचाई

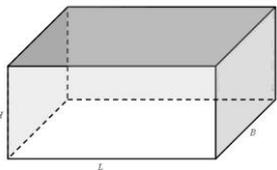
❖ घन (Cube) :-



- 6 वर्गों से मिलकर बनी बंद आकृति।
- सतह (Surface)=6
- किनारे (Edge)= 12
- कोने (Vertex)=8
- T.S.A.= 6 (भुजा)²
- L.S.A.= 4 (भुजा)²
- आयतन = (भुजा)³
- विकर्ण= भुजा $\sqrt{3}$

❖ घनाभ (Cuboid)

(Rectangular Parallelepiped)

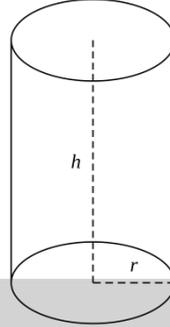


- 6 वर्गों से मिलकर बनी बंद आकृति/विकर्ण= $\sqrt{l^2 + चौ.^2 + ऊ.^2}$
- सतह (Surface)=6
- किनारे (Edge)= 12
- कोने (Vertex)=8
- T.S.A.= 2 (ल. \times चौ.+ चौ. \times ऊ.+ऊ. \times ल.)
- L.S.A.= 2 (चौ. \times ऊ.+ऊ. \times ल.)
- कमरे की चारो दीवारो का क्षेत्रफल = 2 \times ऊ. (ल.+ चौ.)
= परिमाण \times ऊँचाई
- आयतन = ल. \times चौ. \times ऊ.

$$= \sqrt{A_1 \times A_2 \times A_3}$$

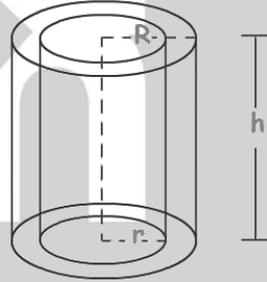
- जहाँ A_1, A_2, A_3 = पृष्ठीय क्षेत्रफल

❖ बेलन (Cylinder) :-



- C.S.A. (वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल)= $2\pi rh$
- T.S.A. (सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल)= $2\pi rh + \pi r^2 + \pi r^2$
 $= 2\pi rh + 2\pi r^2$
 $= 2\pi r (h+r)$
- आयतन = $\pi r^2 h$

❖ खोखला बेलन (Hollow cylinder)

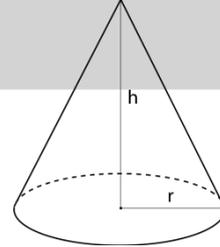


- C.S.A. (वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल) = $2\pi Rh + 2\pi rh = 2\pi h (R+r)$
- T.S.A. (सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल) = $2\pi h (R+r) + 2(\pi R^2 - \pi r^2)$
 $= 2\pi h (R+r) + 2\pi (R+r)(R-r)$
 $= 2\pi (R+r)(h+R-r)$

$$\text{आयतन} = \pi R^2 h - \pi r^2 h$$

$$= \pi h (R^2 - r^2)$$

❖ शंकु (Cone) :-



- बेलन का आयतन = 3 \times शंकु का आयतन

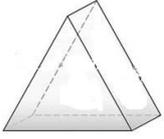
$$L = \sqrt{h^2 + r^2}$$

$$\text{C.S.A. (वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल)} = \frac{1}{2} \times \text{आधार का परिमाण} \times \text{तिर्यक}$$

$$\text{ऊँचाई}$$

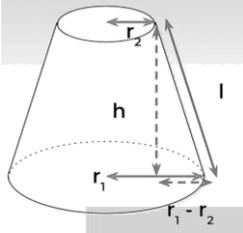
$$= \frac{1}{2} \times 2\pi r \times l = \pi r l$$

T.S.A. (सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल) = $\pi r l + \pi r^2$
 = $\pi r (l+r)$



आयतन = $\frac{\pi r^2 h}{3}$

छिन्नक (frustum) :-



$L = \sqrt{h^2 + (R-r)^2}$

C.S.A. (वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल) = $\pi r l + \pi R l$
 = $\pi l (r+R)$

1. एक गोले तथा अर्द्धगोले का आयतन बराबर है तो इनकी त्रिज्याओं का अनुपात क्या होगा।

Sol. गोले का आयतन = अर्द्धगोले का आयतन

$\frac{4}{3} \pi r_1^3 = \frac{2}{3} \pi r_2^3$

$2r_1^3 = r_2^3$

$\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^3 = \frac{1}{2}$

$\frac{r_1}{r_2} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$

$r_1 : r_2 = 1 : \sqrt[3]{2}$

2. एक अर्द्धगोलाकार कटोरा का सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल क्या होगा यदि इसकी त्रिज्या 7 सेमी. है।

Sol. अर्द्धगोला का सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल = $3\pi r^2$
 = $3 \times \frac{22}{7} \times 7 \times 7 = 462$ सेमी.²

3. एक प्रिज्म का आधार समबाहु त्रिभुज है तथा इसकी भुजा 6 सेमी. है। इसकी ऊँचाई 9 सेमी. है तो इसका आयतन क्या होगा।

Sol. आयतन = आधार का क्षेत्रफल × ऊँचाई
 = $\frac{\sqrt{3}}{4} \times a^2 \times h$
 = $\frac{\sqrt{3}}{4} \times 6 \times 6 \times 9$
 = $8\sqrt{3}$ सेमी.³

4. एक पिरामिड का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल क्या होगा यदि इसका आधार एक आयत है जिसकी भुजाएं 10 सेमी. तथा 12 सेमी. है। इसकी तिर्यक ऊँचाई 8 सेमी. है।

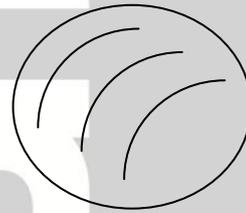
Sol. पिरामिड का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल =

$\frac{1}{2} \times$ आधार का परिमाण × तिर्यक ऊँचाई
 = $\frac{1}{2} \times 2(l+b) \times h$
 = $(10+12) \times 8$
 = 22×8
 = 176 सेमी.²

$\pi r^2 + \pi R^2$
 = $\pi l (r+R) + \pi (r^2 + R^2)$

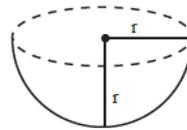
आयतन = $\frac{\pi h}{3} (r^2 + R^2 + Rr)$

❖ गोला (Sphere) :&



- क्षेत्रफल = $4\pi r^2$
 - आयतन = $\frac{4}{3} \pi r^3$

❖ अर्द्धगोला (Semi circle) :-



- C.S.A. (वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल) = $2\pi r^2$
 - T.S.A. (सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल) = $2\pi r^2 + \pi r^2$
 = $3\pi r^2$
 आयतन = $\frac{2}{3} \pi r^3$

❖ प्रिज्म (Prism) :-

L.S.A. (वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल) = आधार का परिमाण × ऊँचाई
 T.S.A. (सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल) = L.S.A. + 2 × त्रिभुज का क्षेत्रफल
 आयतन = आधार का क्षेत्रफल × ऊँचाई

❖ पिरामिड (Pyramid) :-

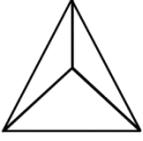
L.S.A. (वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल) = $\frac{1}{2} \times$ आधार का परिमाण × तिर्यक ऊँचाई

T.S.A. (सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल) = L.S.A. + आधार का क्षेत्रफल

आयतन = $\frac{1}{3}$ आधार का क्षेत्रफल \times ऊँचाई

$$l = \sqrt{h^2 + a^2}$$

❖ **समचतुष्फलक (Tetrahedron) :-**



चार समबाहु त्रिभुज से मिलकर बनी बंद आकृति।

$$L.S.A. (\text{वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल}) = \frac{3}{4} \sqrt{3} (\text{भुजा})^2$$

$$T.S.A. (\text{सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल}) = \sqrt{3} (\text{भुजा})^2$$

$$\text{आयतन} = \frac{\sqrt{2}}{12} (\text{भुजा})^3$$

1. एक घन की प्रत्येक भुजा 12 सेमी. है तो इसका विकर्ण, क्षेत्रफल तथा आयतन बताओ।

Sol. घन की भुजा (a) = 12 सेमी.

$$\text{विकर्ण} = \sqrt{3} a = 12\sqrt{3} \text{ सेमी.}$$

$$\begin{aligned} \text{क्षेत्रफल} &= 6a^2 = 6 \times 12^2 = 6 \times 144 \\ &= 864 \end{aligned}$$

$$\text{आयतन} = a^3 = 12^3 = 1728 \text{ सेमी.}^3$$

2. एक घन का क्षेत्रफल तथा आयतन बराबर है तो इसकी भुजा बताओ।

Sol. माना भुजा = a

$$\text{आयतन} = \text{क्षेत्रफल}$$

$$a^3 = 6a^2$$

$$a = 6 \text{ इकाई}$$

3. एक घनाभ की लम्बाई, चौड़ाई तथा ऊँचाई क्रमशः 10 सेमी., 12 सेमी. तथा 15 सेमी. है तो इसका कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल तथा आयतन बताओ।

Sol. लम्बाई (l) = 10 सेमी.

$$\text{चौड़ाई (b)} = 12 \text{ सेमी.}$$

$$\text{ऊँचाई (h)} = 15 \text{ सेमी.}$$

$$\text{क्षेत्रफल} = 2(lb + bh + hl)$$

$$= 2(10 \times 12 + 12 \times 15 + 15 \times 10)$$

$$= 2(120 + 180 + 150)$$

$$= 2 \times 450$$

$$= 900 \text{ सेमी.}^2$$

$$\text{आयतन} = lbh$$

$$= 10 \times 12 \times 15$$

$$= 1800 \text{ सेमी.}$$

4. एक घनाभ की लम्बाई, चौड़ाई, ऊँचाई क्रमशः 6 सेमी., 8 सेमी. तथा 10 सेमी. है तो इसमें रखे जाने वाली बड़ी से बड़ी पेन्सिल की लम्बाई क्या होगी?

Sol. लम्बाई (l) = 6 सेमी.

चौड़ाई (b) = 8 सेमी.

ऊँचाई (h) = 10 सेमी.

बड़ी से बड़ी पेन्सिल की लम्बाई विकर्ण के बराबर होगी।

$$\text{विकर्ण} = \sqrt{l^2 + b^2 + h^2}$$

$$= \sqrt{6^2 + 8^2 + 10^2}$$

$$= \sqrt{200}$$

$$= 10\sqrt{2} \text{ सेमी.}$$

5. एक 14 सेमी. वाली बेलन का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल तथा आयतन का अनुपात क्या होगा।

Sol. वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल : आयतन

$$2\pi rh : \pi r^2 h$$

$$2r : r^2$$

$$2 : r$$

$$2 : 14$$

$$1 : 7$$

6. एक 12 सेमी. त्रिज्या तथा 5 सेमी. ऊँचाई वाले शंकु का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल बताओ।

Sol. तिर्यक ऊँचाई = $\sqrt{r^2 + h^2}$

$$l = \sqrt{12^2 + 5^2}$$

$$l = \sqrt{169}$$

$$l = 13$$

$$\text{वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल} = \pi r l$$

$$= \pi \times 12 \times 13$$

$$= 156\pi \text{ सेमी.}^3$$

7. एक बेलन तथा शंकु की आधार की त्रिज्या तथा आयतन समान है तो इनके ऊँचाई का अनुपात क्या होगा।

Sol. माना बेलन की ऊँचाई = h_1

$$\text{बेलन की त्रिज्या} = r$$

$$\text{शंकु की ऊँचाई} = h_2$$

$$\text{शंकु की त्रिज्या} = r$$

$$\text{बेलन का आयतन} = \text{शंकु का आयतन}$$

$$\pi r^2 h_1 = \frac{1}{3} \pi r^2 h_2$$

$$h_1 = \frac{1}{3} h_2$$

$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{1}{3}$$

$$h_1 : h_2$$

$$1 : 3$$

8. एक 8 सेमी. त्रिज्या तथा 10 सेमी. ऊँचाई वाली बेलन को पिघला कर 15 सेमी. का शंकु बनाया जाये तो शंकु की ऊँचाई क्या होगी?

Sol. शंकु का आयतन = बेलन का आयतन

$$\frac{1}{3} \pi r^2 h = \pi r^2 h$$

$$h = \frac{8 \times 8 \times 10 \times 3}{5 \times 5}$$

$$h = \frac{8 \times 8 \times 2 \times 3}{5}$$

$$h = \frac{384}{5}$$

$$h = 76.8 \text{ सेमी.}$$

